GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MAT3001
DURÉE : 1,5 heures — DATE : 23 Novembre 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Poly Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1:

On rappelle qu'une condition suffisante de permutation intégrale/série est que, si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles définies sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} \int |f_i| d\mu$ soit finie, alors:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i \text{ est intégrable et } \int_E \left(\sum_{i=0}^{+\infty} f_i\right) d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_E f_i d\mu\right).$$

Soit à calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx \quad \left[\text{On a } \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 1} e^{-nx}\right].$$

Exprimer I sous forme de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-kx} dx,$$

et en déduire que $I = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{1+k^2}$.

EXERCICE 2:

On considère la double intégrale définie par:

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy\right] dx.$$

Vérifier qu le théorème de Fubini y est applicable, et calculer sa valeur.

EXERCICE 3:

1. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires:
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$
2. Soit $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + iQ(x,y)$. Déterminer $Q(x,y)$ pour que $f(z)$ soit une fonction holomorphe.

EXERCICE 4:

Calculer l'intégrale suivante
$$\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$$
où Γ est une courbe de Jordan (i.e. un circuit fermé) dans les cas suivants:

- 0 est à l'intérieur de Γ et 1 est à l'extérieur;
- 1 est à l'intérieur de Γ et 0 est à l'extérieur;
- 0 et 1 sont à l'intérieur de Γ;
- 0 et 1 sont à l'extérieur de Γ.

EXERCICE I : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^\infty |\sin x\, e^{-kx}|\, dx \leq \int_0^\infty x\, e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k^2},$$

qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de permutation série/intégrale et il vient :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \sin x\, e^{-nx}\, dx$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \sin x\, e^{-nx}\, dx$$

$$= \sum_{n \geq 1} I_n, \text{ où}$$

$I_n = \int_0^\infty \sin x\, e^{-nx}\, dx$. Après une double ipp, on trouve :

$$I_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} I_n, \text{ i.e. } I_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

On a finalement

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}}$$

EXERCICE II :

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 \underbrace{e^{-x} \sin(2xy)}_{f(x,y)} dy \right] dx .$$

Nous avons

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 |f(x,y)| dy \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx \int_0^1 dy = 1$$

$\Rightarrow$ le théorème de Fubini est donc applicable :

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} f(x,y) dx$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v \, du$,

où $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x} dx$

$dv = \sin 2xy \, dx$ $\quad v = -\frac{1}{2y} \cos 2xy$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2y} \cos 2xy \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2y} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx$$

$$= +\frac{1}{2y} - \frac{1}{2y} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v \, du$$

où $u = e^{-x}$ $\quad du = -e^{-x}$

$dv = \cos 2xy\,dx$ $\quad v = \frac{1}{2y}\sin 2xy$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos 2xy\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{2y}\sin 2xy\right]_0^\infty + \frac{1}{2y}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2y}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

Donc :

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{1}{2y} - \frac{1}{4y^2}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

$$\frac{1+4y^2}{4y^2}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{1}{2y}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{2y}{1+4y^2}$$

Donc :

$$I = \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\,dy \qquad 4y^2 = u \qquad 2y\,dy = \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{du}{1+u} = \frac{1}{4}\left[\ln(1+u)\right]_0^4 = \boxed{\frac{1}{4}\ln 5}$$

EXERCICE III :

$x = r\cos\theta \; ; \; y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial P}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$= r\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial Q}{\partial y}\sin\theta$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta$$

$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -r\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$= +r\sin\theta\frac{\partial P}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$= r\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

$$= r\frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial Q}}$$

$$f(z) = \underbrace{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}_{P(x,y)} + iQ(x,y)$$

$Q = Q(x,y)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2.$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + f(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$-12x^2y + 4y^3 = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= -12x^2y + 4y^3 + f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c.$$

$$\boxed{Q(x,y) = 4(x^2 - y^2)xy + c^{te}}$$

EXERCICE IV :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

a) $0 \in \text{int}(\Gamma)$, $1 \notin \text{int}(\Gamma)$:

. thm des résidus :

$$\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 2\pi i \, \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 0\right)$$

$$= +2\pi i \; . \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = +1}$$

. formule intégrale de Cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3} \; ; \; z_0 = 0$$

$$+1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

b) $0 \notin \text{int}(\Gamma)$, $1 \in \text{int}(\Gamma)$:

. thm des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 1\right)$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-1)^3 \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3} \right)_{z=1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(-\frac{e^z}{z}\right)\Big|_{z=1} = \frac{-1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z \cdot z - e^z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-1)}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{[e^z(z-1)+e^z]z^2 - 2z(z-1)e^z}{z^4}\right]_{z=1}$$

$$= -\frac{e}{2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{e}{2}}$$

- <u>formule intégrale de Cauchy :</u>

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \; ; \; z_0 = 1 \; , \; n = 2.$$

$$f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz$$

$$f^{(2)}(z)\Big|_{z=1} = e$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{e}{2}$$

c) 0 et $1 \in \text{int}(\Gamma)$ · théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 0\right) + \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 1\right)$$

$$= +1 - \frac{e}{2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = 1 - \frac{e}{2}}$$

d) 0 et $1 \notin \text{int}(\Gamma)$: théorème de Cauchy :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = 0.}$$

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MAT3001
DURÉE : 3heures — DATE : 18 Janvier 2008
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE I:

1. Calculer les pôles de la fonction $\cosh z$.

2. Calculer l'intégrale définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ par:

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\cosh z} dz \qquad (1)$$

où C est le contour fermé par le rectangle dont les sommets se trouvent aux points $(-R, 0), (+R, 0), (+R, i\pi)$, et$(-R, i\pi)$ dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{R}$ est tel que $|a| < 1$.

3. Utiliser le calcul de l'intégrale (1) pour prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

EXERCICE II:

Soit $\mathcal{H}$ l'espace préhilbertien séparable des polynômes en $x \in \mathbb{C}$ à valeurs complexes, muni du produit scalaire:

$$< f, g >= \int_0^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x} dx.$$

1. Montrer que l'opérateur linéaire défini par:

$$\mathcal{L} := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx},$$

est auto-adjoint dans $\mathcal{H}$.

2. On rappelle que les vecteurs propres de $\mathcal{L}$ sont des polynômes donnés par la formule:

$$l_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Calculer $l_n(x)$ et la valeur propre λ_n correspondante.

3. Montrer que pour tout polynôme $Q(x)$ on a:

$$< l_n, Q >= (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} Q^{(n)}(x)\, dx.$$

En déduire $< l_n, l_m >$ et en particulier $\|l_n\|$.

EXERCICE III:

1. Montrer que la solution de léquation $xT = 1$ au sens des distributions est donnée par:

$$T = c\delta + vp\frac{1}{x} \qquad c = \text{Cst}$$

2. Montrer que, Y étant la fonction de Heaviside, $Y' = \delta$ au sens des distributions. Utiliser ce résultat pour calculer la transformation de Fourier de Y.(On pourra utiliser le résultat de la question précédente)

3. Calculer la transformation de Fourier de la fonction $e^{-2\pi|x|}$ et en déduire celle de $\frac{1}{1+x^2}$.

4. Le but de cette question est de calculer la transformation de Fourier de $\arctan x$. On considère la fonction

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$$

qui est impaire et tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.Montrer que la transformation de Fourier de f peut être écrite comme:

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} (\arctan x - \frac{\pi}{2}) \sin 2\pi\nu x dx.$$

Calculer cette intégrale et en déduire que:

$$\mathcal{F}(\arctan x) = \frac{1}{2i} vp \frac{1}{\nu} + i \frac{1 - e^{-2\pi|\nu|}}{2\nu}.$$

5. Vérifier le résultat obtenu par dérivation.

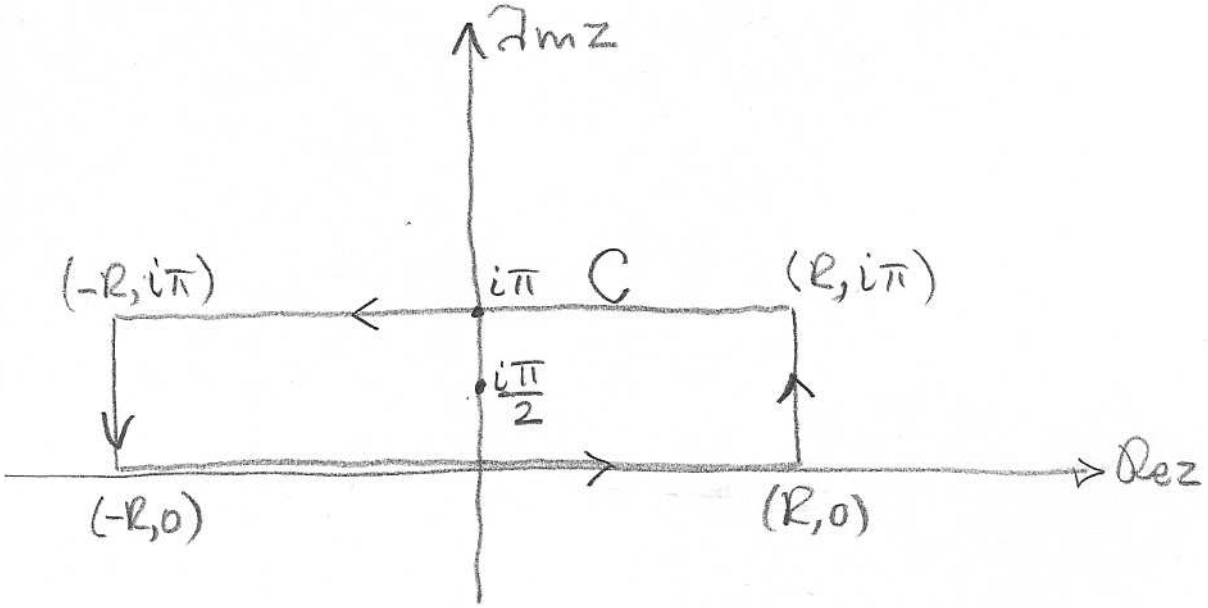
EXERCICE I:

1) $Ch z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0$

$\Leftrightarrow e^{2z} = -1$

$\Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2} i \quad n \in \mathbb{Z}.$

2)



Visiblement le seul pôle contenu dans C est $z = i\frac{\pi}{2}$, où le résidu se calcule par la formule

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f(i\frac{\pi}{2})}{g'(i\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{Sh\, i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{i \sin\frac{\pi}{2}} = -i\, e^{ai\frac{\pi}{2}} \qquad (|a|<1)$$

(Cette formule se trouve dans Bayen-Margaria, Tome I, page 55).

Le théorème des résidus nous permet alors d'écrire :

$$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = 2\pi i\, Res\left\{\frac{e^{az}}{Chz}\,;\, i\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= 2\pi i\left[-i\,e^{ai\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\underline{2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}}}$$

3) $$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{Chx}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)}\,i\,dy$$

$$+ \int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)}\,i\,dy$$

Or, $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx\,Chi\pi + Shx\,Shi\pi}\,dx$$

$$Chi\pi = \frac{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}{2} = Cos\pi = -1$$

$$Shi\pi = \frac{e^{i\pi}-e^{-i\pi}}{2} = i\,Sin\pi = 0$$

Donc : $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx}\,dx$$

Pour calculer les deux intégrales par rapport à y, notons que

$$|Ch(R+iy)| = \left| \frac{e^{R+iy} + e^{-(R+iy)}}{2} \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left\{ |e^{R+iy}| - |e^{-(R+iy)}| \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{R} - e^{-R} \right\} \geqslant \frac{1}{4} e^{R} ;$$

donc

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^{R}} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{(a-1)R} = 0.$$

De la même façon, en notant que

$$|Ch(-R+iy)| \geqslant -\frac{1}{4} e^{R},$$

on pourra déduire que

$$\lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{-(a+1)R} = 0.$$

Par conséquent

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\mathrm{Ch}z}\,dz = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{R\uparrow\infty}\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + e^{ai\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx\right\}$$

$$\Rightarrow (1+e^{ai\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{2\pi}{e^{ia\frac{\pi}{2}}+e^{-ia\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{\pi}{2\,\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}}$$

EXERCICE II :

i) $\forall f, g \in \mathcal{H}$: $\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x}\, dx$

$$L := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$$

En calculant $\langle Lf, g \rangle$ et $\langle f, Lg \rangle$ en faisant deux intégrations par parties pour chacun, on trouve, $\forall f, g \in \mathcal{H}$:

$$\langle Lf, g \rangle - \langle f, Lg \rangle$$

$$= -\int_0^{+\infty} \overline{f'(x)}\, g(x) \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$$- \int_0^{+\infty} \overline{f(x)}\, g'(x) \left[(1-x)e^{-x} - (xe^{-x})' \right] dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} \left[\overline{f'(x)}\, g(x) - \overline{f(x)}\, g'(x) \right] \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$= 0$ Donc L est auto-adjoint.

ii) Les vecteurs propres de L sont des polynômes donnés par la formule:

$$\ell_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= e^x \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} \right]$$

$$= \cancel{e^x} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} \cancel{e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2} (-1)^{n-k} x^{n-k}$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} + \dots + n!$$

Or $L\ell_n(x) = \left(x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}\right)\ell_n(x) = \lambda_n \ell_n(x)$

Le terme de plus haut degré du premier membre est obtenu par:

$$-x\frac{d}{dx}\ell_n(x) = -x\frac{d}{dx}[(-1)^n x^n] = (-1)^{n+1} n x^n,$$

et celui du second membre : $\lambda_n (-1)^n x^n$.

Nous avons donc: $\boxed{\lambda_n = -n}$.

iii) Soit $Q(x)$ un polynôme quelconque.

Alors: $\langle l_n, Q\rangle = \int_0^\infty e^x [x^n e^{-x}]^{(n)} Q(x) e^{-x} dx$

$\overset{\text{ipp}}{=} \underbrace{[(x^n e^{-x})^{(n-1)} Q(x)]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty (x^n e^{-x})^{(n-1)} Q'(x) dx$

$= \dots = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} Q^{(n)}(x) dx$

(après n ipp)

Si $\deg(Q) < n$, on a $\langle l_n, Q\rangle = 0$.

En particulier,

$\langle l_n, l_m\rangle = 0$ lorsque $n \neq m$.

<u>$m = n$:</u> $\|l_n\|^2 = \langle l_n, (-1)^n x^n\rangle$

$= (-1)^n \langle l_n, x^n\rangle$

$= (-1)^n \int_0^\infty e^x (x e^{-x})^{(n)} x^n e^{-x} dx$

$= \underbrace{\dots}_{\text{ipp: n-fois}} = (-1)^n (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} (x^n)^{(n)} dx$

$= \int_0^\infty x^n e^{-x} n! dx = n! \underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-x} dx}_{\Gamma(n+1) = n!}$

$\Rightarrow \boxed{\|l_n\| = n!}$

EXERCICE III :

1) La solution de l'équation $xT = 1$ peut s'écrire comme la somme de :

i) La solution de l'équation sans second membre

$$xT = 0$$

ii) Une solution particulière de l'équation avec second membre $xT = 1$.

Or, nous avons vu en TD que :

$$xT = 0 \iff T = c\delta,$$

c étant une constante et δ étant la distrib^{n} de Dirac. Nous avons vu aussi en TD qu'une solution particulière de l'équation $xT = 1$ est donnée par : $T = vp\frac{1}{x}$.

Par conséquent, la solution générale de l'equation sans second membre $xT = 1$ peut s'écrire comme

$$\boxed{T = c\delta + vp\frac{1}{x}} \qquad c = C^{te}.$$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y' = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'}$$

$$2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = 1$$

$$\Rightarrow 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = vp\frac{1}{\nu} + C\delta$$

$$\therefore \mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\}$$

$Y(x) - \frac{1}{2}$ est impaire; il en est de même de sa TF : $\therefore$ la distrib^n

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\} - \frac{1}{2}\delta$$

est impaire $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \underbrace{\frac{C\delta}{2\pi i} - \frac{\delta}{2}}_{=0}$

$\Rightarrow C = i\pi$

$$\therefore \boxed{\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)}$$

3) $$\mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu x} \cdot e^{-2\pi|x|}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi x(1-i\nu)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi x(1+i\nu)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{i2\pi x(1-i\nu)}}{2\pi(1-i\nu)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-2\pi x(1+i\nu)}}{-2\pi(1+i\nu)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\nu)} + \frac{1}{2\pi(1+i\nu)} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+\nu^2}\right]$$

$$\therefore \mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^2\{e^{-i2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right) = e^{-2\pi|x|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

4) $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$.

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\nu x}\, dx$$

$x \to -x$:

$$\hat{f}(\nu) = -\int_{+\infty}^{-\infty} \underbrace{f(-x)}_{-f(x)\ (f \text{ impaire!})}\, e^{+i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\therefore \hat{f}(\nu) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\nu) = -\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{i2\pi\nu x} - e^{-i2\pi\nu x}\right) dx\right.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

$$= -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi = \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2\pi\nu x \, dx$$

$$\arctan x - \frac{\pi}{2} = u \qquad \sin 2\pi\nu x \, dx = dv$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = du \qquad -\frac{1}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu x = v$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \frac{\cos 2\pi\nu x}{2\pi\nu} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= -2i \left\{ -\frac{1}{4\nu} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= +\frac{i}{2\nu} - \frac{i}{2\pi\nu} \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}}_{\pi e^{-2\pi|\nu|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right)}.$$

En admettant que ce résultat est encore vrai dans $\mathcal{S}'$, on aura :

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}\{\arctan x\} + \mathcal{F}\{\tfrac{\pi}{2}\} - \pi\mathcal{F}\{\gamma\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} + \frac{\pi}{2}\delta(\nu) - \pi\left\{\frac{1}{2\pi i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} - \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

On a finalement

$$\mathcal{F}\{\arctan x\} = \hat{f}(\nu) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{F}\{\arctan x\} = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}$$

5) On a $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{\arctan x\}$$

Il faut donc vérifier que :

$$\pi e^{-2\pi|\nu|} = 2i\pi\nu\left[\frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}\right]$$

$$= -\pi\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \pi\overbrace{\nu\,\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}^{1}$$

$$= -\pi + \pi e^{-2\pi|\nu|} + \pi = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

▨